03.01.2020

Cevap Anahtarı

İdeal Teori Dersi Final Soruları

1- R bir halka, I ve J R'nin iki ideali olsun. $I+J$ ve $I.J$ kümelerini tanımlayınız. Ayrıca $I+J$ kümesi R'nin bir idealidir, gösteriniz.

2- R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R'nin her ideali asalsa R cisimdir, gösteriniz.

3- a) $(\mathbb{Z}_{30}, \oplus, \odot)$ halkasının bütün ideallerini ve varsa maksimal ideallerini bulunuz.

b) R birimli ve değişmeli bir halka olsun. M, R'nin maksimal ideali ise R/M cisimdir, gösteriniz.

4- a) $f: R \longrightarrow S$ halka homomorfizması ve J, S'nin bir ideali olsun. $(\sqrt{J})^c = \sqrt{J^c}$ olduğunu gösteriniz.

b) R ve S iki halka, $f(R) = S$ ve I, R'nin Çekf'i kapsayan bir ideali olsun. $R/I \cong S/f(I)$ ise $g: R \longrightarrow S/f(I)$ $r \in R$, $g(r) = f(r) + f(I)$ homomorfizmasının çekirdeğini bulunuz.

5- a) R bir Boole halkası, I R'nin asal ideali ise $\forall a \in R$ için $a \in I \vee 1-a \in I$ olduğunu gösteriniz

b) $R = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_8$ halkası için $a = (\bar{6}, \bar{2})$ elemanının Anhilatörünü hesaplayınız.

Not: Sorular eşit puanlıdır. Soru kağıdına cevap yazmayınız.

Cevap 1-) $I+J=\{a+b \mid a\in I,\ b\in J\}$

$I.J=\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i\in I,\ b_i\in J\}$

I ve J ideal olduklarından $I+J\neq\emptyset$ dir.

$\forall\ a_1+b_1,\ a_2+b_2\in I+J \Rightarrow (a_1+b_1)-(a_2+b_2)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\in I+J.$

$\forall r\in R,\ \forall a+b\in I+J \Rightarrow r(a+b)=ra+rb\in I+J$

$(a+b)r=ar+br\in I+J$ olup

R nin bir idealidir.

Cevap 2-) (0) ideali asal olduğundan

$R/_{(0)}\cong R$ olup R Tamlık bölgesidir.

$0\neq a\in R$ için $a^{-1}\in R$ olduğunu göstermeliyiz.

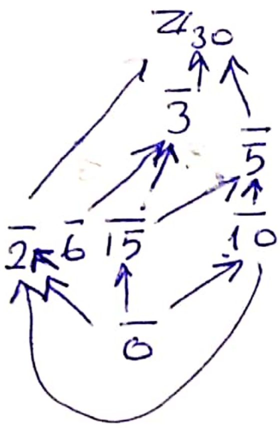
$0\neq a\in R$ için $(a).(a)=(a^2)$ olur. (a^2) de asal ideal olduğundan $(a)\subseteq(a^2)$, $(a^2)\subseteq(a)$ olup

$(a)=(a^2)$ bulunur. $a\in(a^2)\Rightarrow a=a^2.x,\ x\in R.$

$a-a^2x=0_R \Rightarrow a(1-ax)=0_R,\ a\neq 0_R\quad 1-ax=0_R$

$\Rightarrow ax=1_R$ olup a terslenebilirdir.

Cevap 3 a) $\langle\bar{2}\rangle, \langle\bar{3}\rangle, \langle\bar{5}\rangle$ idealleri maksimal idealdir.



b) M, R'nin maksimal ideali olsun.

$M\neq R$, $R/_M\neq M$ dir. $\forall x+M\in R/_M$ için

$x+M\neq M \Rightarrow x\in R-M \Rightarrow M+(x)=R$ olup

$m+ax=1$, $\exists m\in M$ ve $\exists a\in R$ var $m=1-ax\in M$

ve $(a+M)(x+M)=ax+M=1+M$ den $(x+M)^{-1}=a+M$

bulunur.

Cevap 4-) a) $r \in (\sqrt{J})^c = f^{-1}(\sqrt{J}) \Leftrightarrow f(r) \in \sqrt{J}$

$\Leftrightarrow$ bir $n \geq 1$ için $(f(r))^n = f(r^n) \in J$

$\Leftrightarrow r^n \in f^{-1}(J) = J^c$

$\Leftrightarrow r \in \sqrt{J^c}$ bulunur.

b) $Çekg = \{ r \in R \mid f(r) + f(I) = f(I) \}$

$= \{ r \in R \mid f(r) \in f(I) \}$

$= f^{-1}(f(I))$ dir.

$I \subseteq f^{-1}(f(I))$ Açık $Çekf \subseteq I$ olduğumuzdan

$x \in f^{-1}(f(I)) \Rightarrow f(x) \in f(I)$

$\Rightarrow f(x) = f(a), \ a \in I$

$\Rightarrow x - a \in Çekf \subseteq I$

$\Rightarrow x \in I$ olup

$Çekg = I$ bulunur.

Cevap 5-) a) R Boole halkası ve I asal ideal olsun. $a \in I \vee 1-a \in I$ dır.

$0 = a(1-a) \in I$ ve I asal olduğundan $a \in I \vee 1-a \in I$ dır. olacak.

b) $Ann(a) = (0:a) = \{ r \in R \mid ra = 0 \}$ olacak.

o halde

$Ann((\bar{6},\bar{2})) = \{ (\bar{0},\bar{0}), (\bar{2},\bar{0}), (\bar{4},\bar{0}), (\bar{6},\bar{0}), (\bar{8},\bar{0}), (\bar{10},\bar{0}),$

$(\bar{0},\bar{4}), (\bar{2},\bar{4}), (\bar{4},\bar{4}), (\bar{6},\bar{4}), (\bar{8},\bar{4}), (\bar{10},\bar{4}) \}$ dır.